ثانوية محمد الخامس - القنيطرة - الأستاذ محمد غريز	تصحيح الامتحان الوطني الموحد لدورة يوليوز 2007 الاستدراكية	الثانية علوم رياضية أ و ب

التمرين الاول

1 - أ - $(S)\ \begin{cases} x \equiv a\,[p] \\ x \equiv b\,[q] \end{cases}$

لدينا $p \wedge q = 1$ إذن حسب *Bezout* $\exists(u_0,v_0) \in \mathbb{Z}^2 : pu_0 + qv_0 = 1$

ب - ليكن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$

لدينا $x_0 \equiv aqv_0[p]$ و بما أن $pu_0 + qv_0 = 1$ فان $qv_0 \equiv 1[p]$

اذن $aqv_0 \equiv a[p]$ ومنه $x_0 \equiv a[p]$ (1)

لدينا $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ اذن $x_0 \equiv bp[q]$

و بما أن $pu_0 + qv_0 = 1$ فان $pu_0 \equiv 1[q]$ اذن $bpu_0 \equiv b[q]$

و منه $x_0 \equiv b[q]$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن x_0 حل للنظمة *(S)*

2 - ليكن x حلا للنظمة *(S)*

لدينا $\begin{cases} x \equiv a\,[p] \\ x \equiv b\,[q] \end{cases}$ و $\begin{cases} x_0 \equiv a\,[p] \\ x_0 \equiv b\,[q] \end{cases}$

اذن $x - x_0 \equiv 0[q]$ و $x - x_0 \equiv 0[p]$ أي $\exists(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} x - x_0 = mp \\ x - x_0 = nq \end{cases}$

$q | x - x_0 \Rightarrow q | mp$ و بما أن $p \wedge q = 1$ فانه حسب مبرهنة *Gauss* $q | m$

اذن $m = k_1 q$ $(\exists k_1 \in \mathbb{Z})$

وبما أن $x - x_0 = mp$ فان $x - x_0 = k_1 pq$ اذن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$

3 - ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث pq يقسم العدد $x - x_0$

لدينا $x - x_0 \equiv 0[pq]$ اذن $(\exists k \in \mathbb{Z}) : x - x_0 = kpq$

اذن $x - x_0 = (kp)q = (kq)p$ اذن $p | x - x_0$ و $q | x - x_0$ أي $\begin{cases} x \equiv x_0\,[p] \\ x \equiv x_0\,[q] \end{cases}$

وبما أن x_0 حل للنظمة (S) فان $\begin{cases} x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$ اذن $\begin{cases} x \equiv a\,[p] \\ x \equiv b\,[q] \end{cases}$ اذن x حل للنظمة *(S)*

4 - لدينا $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة *(S)*

اذن حلول النظمة *(S)* هي الأعداد النسبية x بحيث $x \equiv x_0[pq]$

5 - لدينا $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

العددين 8 و 13 أوليان فيما بينهما اذن $\exists(u_0,v_0) = (5,-3)$ بحيث *8(5)+13(-3)=1*

لدينا $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ أي $x_0 = (3\times 8\times 5) + (1\times 13\times(-3)) = 120 - 39$

اذن $x_0 = 81$ حل للنظمة *(S)*

و بالتالي مجموعة حلول النظمة *(S)* هي الاعداد النسبية x بحيث $x \equiv 81[104]$

التمرين الثاني

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر من أو يساوي 3 . لدينا n صندوقا مرقما من 1 إلى n

الصندوق رقم k $(1 \le k \le n)$ يحتوي على k كرة بيضاء و $n-k$ كرة سوداء

1 - ليكن B الحدث الكرة المسحوبة بيضاء لكل k من $\{1,2..........n\}$

نضع E_k الحدث اختيار الصندوق رقم k

لدينا $\Omega = E_1 \cup E_2 ....\cup E_n$ و $(k \ne p)$ $E_k \cap E_p = \varnothing$

$$p(B) = p(B \cap \Omega) = p(B \cap (E_1 \cup E_2 \cup ....\cup E_n))$$

$$p(B) = p((B \cap E_1) \cup (B \cap E_2) \cup ....\cup (B \cap E_n))$$

$$p(B) = p(B \cap E_1) + (B \cap E_2) + ...+ (B \cap E_n)$$

لدينا $p_{E_k}(B) = \dfrac{p(B \cap E_k)}{p(E_k)}$ اذن $p(B \cap E_k) = p(E_k) \times p_{E_k}(B)$

اذن $p(B) = p(E_1) \times p_{E_1}(B) + p(E_2) \times p_{E_2}(B) + ...p(E_n) \times p_{E_n}(B)$

لدينا $p(E_1) = p(E_2) = ...p(E_n) = \dfrac{1}{n}$

و $p_{E_k}(B) = \dfrac{k}{n}$ (لان الصندوق رقم k يحتوي على k كرة بيضاء)

اذن $p(B) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} + ... + \dfrac{n}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n(n+1)}{2n}$

و بالتالي $\boxed{p(B) = \dfrac{(n+1)}{2n}}$

2 - ليكن I الحدث : الصندوق يحمل رقما فرديا

لدينا n فردي $n=2k+1$. عدد الصناديق التي تحمل رقما فرديا هو $\dfrac{(2k+1)+1}{2} = k+1$

اذن $p(I) = \dfrac{C_{k+1}^1}{C_n^1} = \dfrac{k+1}{n}$ وبما أن $n = 2k+1$ فإن $k = \dfrac{n-1}{2}$ اذن $p(I) = \dfrac{\frac{n-1}{2}+1}{n}$

و بالتالي $\boxed{p(I) = \dfrac{(n+1)}{2n}}$

3 - احتمال الحصول على كرة بيضاء علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي هو : $p_I(B) = \dfrac{p(B \cap I)}{p(I)}$

لدينا $I = E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup ....E_n$

اذن $p(B \cap I) = p(B \cap (E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup ....E_n))$

$$= p((B \cap E_1) \cup (B \cap E_3) \cup ....\cup (B \cap E_n))$$

$$= p(B \cap E_1) + (B \cap E_3) + ...+ (B \cap E_n)$$

اذن $p(B \cap I) = p(E_1) \times p_{E_1}(B) + p(E_3) \times p_{E_3}(B) + ...+ p(E_n) \times p_{E_n}(B)$

$$p(B \cap I) = \left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} \times \frac{3}{n}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} \times \frac{n}{n}\right)$$

$$p(B \cap I) = \frac{1}{n^2}(1+3+5+................+n)$$

يمكن أن نبين بالترجع أن : $1+3+5+.......................+n = 1+3+5+.................................+2k+1$

$$= (k+1)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$ (لان $(n = 2k+1)$)

اذن $p(B \cap I) = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$ اذن $p_I(B) = \dfrac{(n+1)^2}{4n^2} \times \dfrac{2n}{n+1}$ **و بالتالي** $\boxed{p_I(B) = \dfrac{n+1}{2n}}$

التمرين الثالث

نعتبر المجموعة $(H)=\left\{M(z)\in(P)/z^2+\bar{z}^2-|z|^2=1\right\}$

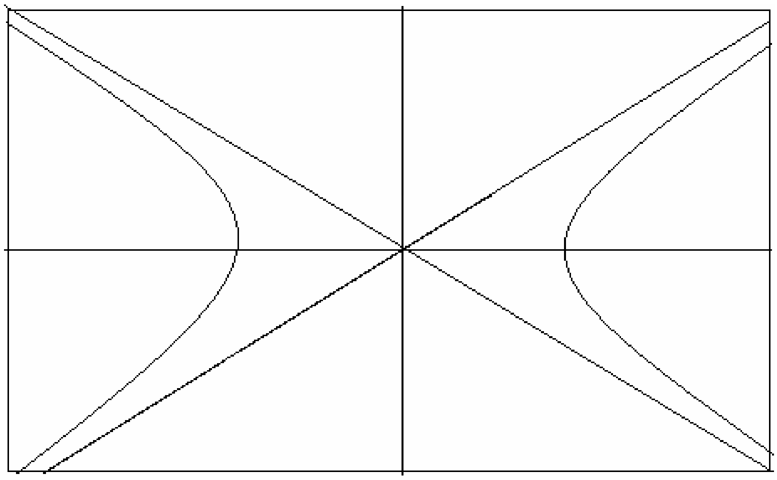
1 - أ - ليكن $z=x+iy$

$$M\in(H)\Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2-|z|^2=1$$
$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy+x^2-y^2-2ixy-x^2-y^2=1$$
$$\Leftrightarrow x^2-3y^2=1 \qquad (1)$$

(1) هي معادلة ديكارتية للمجموعة *(H)*

ب - بما أن معادلة المجموعة *(H)* هي : $\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1$ فان *(H)* هذلول مركزه $O(0,0)$

و رأسيه $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$ ومقاربيه $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ و $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$



2 - لتكن $M(z)$ و $M'(z)$ نقطتان من *(H)* . بحيث $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$

نضع $\varphi(z,z')=z\bar{z}'+\bar{z}z'-\overline{zz'}$

لدينا $z\overline{z'}=(xx'+yy')+i(x'y-xy')$ و $\bar{z}z'=(xx'+yy')+i(xy'-x'y)$

و $\overline{zz'}=(xx'-yy')-i(xy'+x'y)$ اذن $\varphi(z,z')=(xx'+3yy')+i(xy'+x'y)$

لدينا $(xx'+3yy')^2-3(xy'+x'y)^2=x^2x'^2+9y^2y'^2-3x^2y'^2-3x'^2y^2$

بما أن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتان من(H) فان $x'^2-3y'^2=1$ و $x^2-3y^2=1$

اذن $\left(x^2-3y^2\right)\left(x'^2-3y'^2\right)=1$ أي $x^2x'^2+9y^2y'^2-3x^2y'^2-3x'^2y^2=1$

و بالتالي $M(\varphi(z,z'))\in(H)$

ب - لدينا $\varphi(z,1)=z\times1+\bar{z}\times1-\bar{z}\times1=z$ و لدينا $\varphi(z,\bar{z})=z\times\bar{\bar{z}}+\bar{z}\times\bar{z}-\bar{z}\times z\;=z^2+\bar{z}^2-|z|^2$

وبما أن $M(z)\in(H)$ فان $z^2+\bar{z}^2-|z|^2=1$ و منه $\varphi(z,\bar{z})=1$

3 - نزود *(H)* بقانون التركيب الداخلي * حيث لكل $M(z)$ و $M(z')$ من *(H)* $M(z)*M(z')=M(\varphi(z,z'))$

لكل $M(z)$ و $M(z')$ و $M(z'')$

لدينا $M(z)*(M(z')*M(z''))=M(z)*M(\varphi(z',z''))$

$$=M(z)*M(z'\overline{z''}+\overline{z'}z''-\overline{z'z''})=M(\varphi(z,z'\overline{z''}+\overline{z'}z''-\overline{z'z''}))$$
$$=M(z(\overline{z'}z''+z'\overline{z''}-z'z'')+\bar{z}(z'\overline{z''}+\overline{z'}z''-\overline{z'z''})-\overline{zz'}z''-\bar{z}z'\overline{z''}+\bar{z}z'z'')$$
$$=M(z\overline{z'}z''+zz'\overline{z''}-zz'z''-\overline{zz'z''}+\bar{z}z'z'') \qquad (1)$$

$$(M(z)*M(z'))*M(z'')=M(z\overline{z'}+\overline{z}z'-\overline{z}\,\overline{z'})*M(z'')$$
$$=M(\varphi(z\overline{z'}+\overline{z}z'-\overline{z}\,\overline{z'},z''))$$
$$=M(z\overline{z'}\,\overline{z''}+\overline{z}z''\overline{z''}-\overline{z}\,\overline{z'}\,\overline{z''}+\overline{z}z'z''+z\overline{z'}z''-zz'z''-\overline{z}z'\overline{z''}-z\overline{z'}\,\overline{z''}+zz'\overline{z''})$$
$$=M(z\overline{z'}z''+zz'\overline{z''}-zz'z''-\overline{z}\,\overline{z'}\,\overline{z''}+\overline{z}z'z'') \qquad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $M(z)*(M(z')*M(z''))=(M(z)*M(z'))*M(z'')$

اذن القانون * تجميعي

لدينا $M(z)*M(z')=M(\varphi(z,z'))=M(z\overline{z'}+\overline{z}z'-\overline{z}\,\overline{z'})$

و $M(z')*M(z)=M(\varphi(z',z))=M(z'\overline{z}+\overline{z'}z-\overline{z}\,\overline{z'})$

اذن $M(z)*M(z')=M(z')*M(z)$ لكل $M(z)$ و $M(z')$ من *(H)*

اذن القانون * تبادلي

لدينا $M(\varphi(z,1))=M(z)$ أي $M(z)*M(1)=M(z)$ لكل $M(z)$ من *(H)*

اذن $M(1)$ هو العنصر المحايد للقانون *

لدينا $M(\varphi(z,\overline{z}))=M(1)$ اذن $M(z)*M(\overline{z})=M(1)$

اذن كل عنصر $M(z)$ من *(H)* يقبل مماثلا في *(H)* هو $M(\overline{z})$ و بالتالي $((H),*)$ زمرة تبادلية

التمرين الرابع

$$F=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

نضع $I=M(1,0)$ و $J=M(0,1)$ و $O=M(0,0)$

1 - أ - $F\subset M_2(\mathbb{R})$ و $F\neq\varnothing$ لان $O\in F$

لكل $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من *F* $M(a,b)-M(c,d)=M(a-c,b-d)\in F$

اذن $(F,+)$ زمرة جزئية من الزمرة التبادلية $(M_2(R),+)$ اذن $(F,+)$ زمرة تبادلية

$\lambda.M=\lambda.(aI+bJ)=(\lambda a)I+(\lambda b)J \qquad (\forall\lambda\in\mathbb{R}) \qquad \forall M(a,b)\in F$

اذن $\lambda.M\in F$ اذن *F* جزء مستقر بالنسبة للقانون الخارجي .

بما أن $F\subset M_2(\mathbb{R})$ و $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي فان الخاصيات الأربع تبقى متحققة

$$\alpha.(M+M')=\alpha.M+\alpha.M' \qquad (\forall\alpha\in\mathbb{R}) \qquad \forall(M,M')\in F^2$$
$$(\alpha+\beta).M=\alpha.M+\beta M \qquad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \qquad \forall M\in F$$
$$(\alpha\beta).M=\alpha.(\beta.M)$$
$$1.M=M \qquad \forall M\in F$$

اذن $(F,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي

ب - لدينا $M(a,b)=aI+bJ$ $(\forall M\in F)$ اذن الأسرة (I,J) مولدة للفضاء المتجهي الحقيقي *F*

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \qquad \alpha I+\beta J=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha+\beta & -\beta \\ 5\beta & \alpha-3\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

اذن الأسرة (I,J) حرة ومنه الأسرة (I,J) أساس للفضاء المتجهي *F*

عدد عناصر الأساس (I,J) هو 2 اذن $\dim F=2$

2 - ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$

نضع $\alpha=x_1+iy_1$ حيث $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

لكل z من $\mathbb{C}$ يوجد زوج وحيد (x,y) من $\mathbb{R}^2$ بحيث $z=x+iy$

هل يوجد زوج وحيد (β,γ) من $\mathbb{R}^2$ بحيث $z=\beta+\gamma\alpha$ ؟

$$x+iy=\beta+\gamma(x_1+iy_1) \iff x+iy=\beta+\gamma x_1+i\gamma y_1$$

$$\iff \begin{cases}\beta+\gamma x_1=x\\ \gamma y_1=y\end{cases} \iff \begin{cases}\gamma=\dfrac{y}{y_1}\\ \beta+\dfrac{x_1}{y_1}y=x\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\beta=x-\dfrac{x_1}{y_1}y\\ \gamma=\dfrac{y}{y_1}\end{cases}$$

لكل z من $\mathbb{C}$ يوجد زوج وحيد (β,γ) من $\mathbb{R}^2$ بحيث $z=\beta.1+\gamma.\alpha$

و بالتالي : $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,.)$

3 - $\psi:\mathbb{C}\to F$

$z\to\psi(z)=M(a,b)$ لكل عنصر z من $\mathbb{C}$ حيث $z=a+\alpha b$ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

أ - لدينا $J=\begin{pmatrix}1&-1\\5&-3\end{pmatrix}$ اذن $J^2=\begin{pmatrix}-4&2\\-10&4\end{pmatrix}$

و لدينا $I+J=\begin{pmatrix}2&-1\\5&-2\end{pmatrix}$ اذن $J^2=-2(I+J)$

لدينا $\psi(\alpha)=\psi(0+\alpha 1)$ اذن $\psi(\alpha)=M(0,1)=J$

ب - ليكن $z=a+\alpha b$ و $z'=a'+\alpha b'$ عنصران من $\mathbb{C}$

لدينا $\psi(z.z')=\psi((a+\alpha b)(a'+\alpha b'))$

$$=\psi(aa'+(ab'+a'b)\alpha+\alpha^2bb')$$

ولدينا

$$\begin{aligned}\psi(z)\times\psi(z')&=M(a,b)\times M(a',b')\\&=(aI+bJ)\times(a'I+b'J)\\&=aa'I+(ab'+a'b)J+bb'J^2=aa'I+(ab'+a'b)J+bb'(-2I-2J)\\&=(aa'-2bb')I+(ab'+a'b-2bb')J\\&=M(aa'-2bb',ab'+a'b-2bb')\\&=\psi((aa'-2bb')+\alpha(ab'+a'b-2bb'))\end{aligned}$$

لكي يكون ψ تشاكلا تقابليا يجب أن يكون : $aa'+(ab'+a'b)\alpha+\alpha^2bb'=(aa'-2bb')+\alpha(ab'+a'b-2bb')$

اذن $\alpha^2bb'=-2bb'-2\alpha bb'$ أي $\alpha^2+2\alpha+2=0$

لدينا $\Delta'=1-2=-1$ اذن $\alpha=-1+i$ أو $\alpha=-1-i$

4 - نأخذ $\alpha=-1+i$

لدينا $\psi(\alpha)=J$ و $\psi(\alpha^{2007})=\psi(\underbrace{\alpha.\alpha\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha}_{\text{مـــرة}2007})$

اذن (لان ψ تشاكل من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(F,\times)$) $\psi(\alpha^{2007})=\psi(\alpha).\psi(\alpha)\ldots\ldots\ldots\ldots\psi(\alpha)$

اذن $\psi(\alpha^{2007})=J^{2007}$

حسب صيغة *Moivre* لدينا

$$\alpha^{2007}=(-1+i)^{2007}=(\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}))^{2007}=(\sqrt{2})^{2007}(\cos\frac{3\pi}{4}.2007+i\sin\frac{3\pi}{4}.2007)$$

اذن

$$\alpha^{2007}=(\sqrt{2})^{2007}(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})=(\sqrt{2})^{2007}(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{-2^{1004}}{2}-i\frac{2^{1004}}{2}$$

اذن $\alpha^{2007}=-2^{1003}-i2^{1003}=-2^{1003}(1+i)=-2^{1003}(-1+i+2)=-2^{1004}-2^{1003}(-1+i)$

$\alpha^{2007}=-2^{1004}+\alpha(-2^{1003})$

نعلم أن $\psi(z)=M(a,b)$ أي $\psi(a+\alpha b)=M(a,b)$

$$\psi(\alpha^{2007})=J^{2007}\Leftrightarrow\psi(-2^{1004}+\alpha(-2^{1003}))=J^{2007}$$
$$\Leftrightarrow M(-2^{1004},-2^{1003})=J^{2007}$$
$$\Leftrightarrow\boxed{J^{2007}=-2^{1004}I-2^{1003}J}$$

التمرين الخامس

I) 1 - $g(x)=1+x-e^{-x}$

أ - $g'(x)=1+x-e^{-x}\succ 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ اذن g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

ب - $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}1+x-e^{-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}1+x\left(1-\frac{1}{xe^{x}}\right)$$
$$=(-\infty)(-(-\infty))=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1+x-e^{-x}$

$=+\infty$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty\nearrow 0\nearrow+\infty$

ج - g متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ اذن g تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

و بما أن $g(0)=0$ فان $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$

2 - لدينا $f(x)=\dfrac{1}{1+x-e^{-x}}$

أ - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{1}{-\infty}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{+\infty}=0$

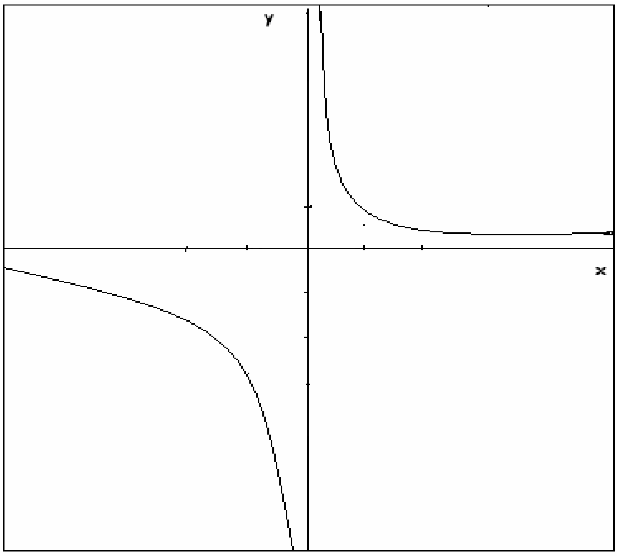
$$\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{1}{1+x-e^{-x}}=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{1}{\frac{e^{x}-1}{e^{x}}+x}=+\infty$$ و $$\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{1}{\frac{e^{x}-1}{x}+x}=-\infty$$

ب - لدينا $(\forall x\in\mathbb{R})$ $f'(x)=\dfrac{-(1+x-e^{-x})'}{(1+x-e^{-x})^{2}}=\dfrac{-g'(x)}{g^{2}(x)}$

ج - بما أن $g'(x)\succ0$ فان $f'(x)\prec0$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	$0\searrow-\infty$	$+\infty\searrow 0$

د -



3 - أ - ليكن n من $\mathbb{N}^*$

لتكن $h(x)=f(x)-n$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-n=-n$ و $\lim\limits_{x\to0+} h(x)=+\infty-n=+\infty$

$h'(x)=f'(x)\prec 0$ $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})$. اذن h تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^{*+}$

بما أن متصلة و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^{*+}$ فان h تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $]-n,+\infty[$

اذن يوجد عدد حقيقي وحيد x_n من $]0,+\infty[$ بحيث $h(x_n)=0$

اذن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0,+\infty[$

ب - لدينا $f(x_n)=n$ و $f(x_{n+1})=n+1$ اذن $f(x_{n+1})\succ f(x_n)$

وبما أن f تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ فان $x_{n+1}\prec x_n$ اذن المتتالية (x_n) تناقصية

لدينا $x_n\in]0,+\infty[$ اذن (x_n) مصغورة بالعدد 0

و بما أن (x_n) تناقصية و مصغورة بالعدد 0 فان (x_n) متقاربة

ج - لتكن $\ell=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$$f(x_n)=n \Leftrightarrow \frac{1}{1+x_n-e^{-x_n}}=n$$

$$\Leftrightarrow 1+x_n-e^{-x_n}=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1+x_n-e^{-x_n})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow 1+\ell-e^{-\ell}=0$$

$$\Leftrightarrow 1+\ell=e^{-\ell}$$

نفترض أن $\ell\succ 0$

اذن $1+\ell\succ 1$ و $-\ell\prec 0$ أي $e^{-\ell}\prec 1$ اذن $1+\ell\succ 1$ و $e^{-\ell}\prec 1$ غير ممكن

اذن $\ell=0$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$

II) 1 - أ - $f(x)=1\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+x-e^{-x}}=1$

$$\Leftrightarrow 1+x-e^{-x}=1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}=x$$

ب - حسب س 3 - أ - المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha=x_1\succ 0$

لنبين أن $\frac{1}{e} \le \alpha \le 1$

لتكن $u(x)=f(x)-1$ لدينا u متصلة على $\left[\frac{1}{e},1\right]$ و $u'(x)=f'(x) \succ 0$ اذن u تناقصية قطعا $\left[\frac{1}{e},1\right]$

لدينا $u(1)\times u(\frac{1}{e}) \prec 0$ اذن حسب مبرهنة القيم الوسطية المعادلة $e^{-x}=x$ تقبل حلا وحيدا $\frac{1}{e} \prec \alpha \prec 1$

2 - أ - لدينا $y_1=1$ و $y_{n+1}=e^{-y_n}$

من أجل $n=1$ لدينا $y_1=1$ اذن $\frac{1}{e} \le y_1 \le 1$

نفترض أن $\frac{1}{e} \le y_n \le 1$ و نبين أن $\frac{1}{e} \le y_{n+1} \le 1$

لدينا $\frac{1}{e} \le y_n \le 1$ اذن $-1 \le -y_n \le -\frac{1}{e}$ أي $-1 \le -y_n \le 0$

اذن $e^{-1} \le e^{-y_n} \le 1$ أي $\frac{1}{e} \le y_{n+1} \le 1$

و بالتالي $\frac{1}{e} \le y_n \le 1$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

ب - لتكن $f(x)=e^{-x}$ f متصلة على المجال المغلوق الذي طرفاه α و y_n

و قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح الذي طرفاه α و y_n

اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد عدد حقيقي c محصور بين α و y_n

بحيث $|f(y_n)-f(\alpha)|=|f'(c)||y_n-\alpha|$ اذن $|y_{n+1}-\alpha|=|f'(c)||y_n-\alpha|$

لدينا $f'(x)=-e^{-x}$ اذن $f'(c)=-e^{-c}$ أي $|f'(c)|=e^{-c}$

لدينا $\alpha \prec c \prec y_n$ اذن $-y_n \prec -c \prec -\alpha$

و بما أن $\frac{1}{e} \prec \alpha \prec 1$ فان $-1 \prec -\alpha \prec -\frac{1}{e}$

اذن $0 \prec e^{-c} \prec e^{-\alpha} \prec e^{-\frac{1}{e}}$

و بالتالي $|y_{n+1}-\alpha| \le e^{-\frac{1}{e}}|y_n-\alpha|$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ج - لدينا $|y_2-\alpha| \le e^{-\frac{1}{e}}|y_1-\alpha|$

$|y_3-\alpha| \le e^{-\frac{1}{e}}|y_2-\alpha|$

....

$|y_n-\alpha| \le e^{-\frac{1}{e}}|y_{n-1}-\alpha|$

اذن $|y_n-\alpha| \le (e^{-\frac{1}{e}})^{n-1}|y_1-\alpha|$ و منه $|y_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}\right)^{n-1}|y_1-\alpha|$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}\right)^{n-1}=0$ فان (y_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\alpha$

III) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :
$$\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt, x \succ 0 \\ F(0)=\frac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$$

1 - أ - لدينا $t \succ 0$ اذن $-t \prec 0$ أي $e^{-t} \prec 1$ اذن $t+e^{-t} \prec 1+t$ أي $t \prec 1+t-e^{-t}$

اذن $\frac{1}{1+t-e^{-t}} \prec \frac{1}{t}$ أي $f(t) \prec \frac{1}{t}$ *(1)*

لدينا $-e^{-t} \prec 0$ اذن $1+t-e^{-t} \prec 1+t$ إذن $\frac{1}{1+t} \prec \frac{1}{1+t-e^{-t}}$ أي $\frac{1}{1+t} \prec f(t)$ *(2)*

من *(1)* و *(2)* نستنتج أن $\frac{1}{1+t} \le f(t) \le \frac{1}{t}$ $(\forall t \succ 0)$

ب - لدينا $\frac{1}{1+t} \le f(t) \le \frac{1}{t}$

اذن $\int_x^{2x} \frac{1}{1+t}dt \le \int_x^{2x} f(t)dt \le \int_x^{x} \frac{1}{t}dt$ $(x \succ 0)$

اذن $\ln(1+2x) - \ln(1+x) \le F(x) \le \ln(2x) - \ln(x)$

اذن $\ln(\frac{1+2x}{1+x}) \le F(x) \le \ln(\frac{2x}{x}) = \ln(2)$

و بما أن $\lim_{x \to +\infty} \ln(\frac{1+2x}{1+x}) = \ln 2$ فان $\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ln 2}$

2 - أ - لنبين أن $1 - t \le e^{-t} \le 1 - t + \frac{t^2}{2}$ $(\forall t \ge 0)$

لتكن $u(t) = 1 - t$ و $v(t) = e^{-t}$

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على $[0,+\infty[$ و $u(0) = 1$ و $v(0) = 1$

$v'(t) = -e^{-t}$ و $u'(t) = -1$ $\forall t \in [0,+\infty[$

لدينا $t \ge 0$ اذن $-t \le 0$ أي $e^{-t} \le 1$ اي $-1 \le -e^{-t}$ أي $u'(t) \le v'(t)$

اذن $u(t) \le v(t)$ لكل $(t \ge 0)$ *(1)*

لتكن $w(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2}$ لدينا $w(0) = 1$ و $u(0) = 1$

$w'(t) = -1 + t$ $\forall t \in [0,+\infty[$

بما أن $u(t) \le v(t)$ فان $1 - t \le e^{-t}$ أي $-e^{-t} \le -1 + t$

اذن $v'(t) \le w'(t)$

و منه $v(t) \le w(t)$ لكل $(t \ge 0)$ *(2)*

من *(1)* و *(2)* نستنتج أن $u(t) \le v(t) \le w(t)$

و بالتالي $1 - t \le e^{-t} \le 1 - t + \frac{t^2}{2}$ $(\forall t \ge 0)$

ب - لدينا $1 - t \le e^{-t}$ لكل $t \ge 0$

اذن $1 - e^{-t} \le t$ أي $1 + t - e^{-t} \le 2t$ اي $\frac{1}{2t} \le \frac{1}{1+t-e^{-t}}$

اذن $\frac{1}{2t} \le f(t)$ *(1)*

لدينا
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}) - f(t) = \frac{1}{2}(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}) - \frac{1}{1+t-e^{-t}}$$
$$= \frac{2 - 2t + t^2 - 2e^{-t}}{t(4-t)(1+t-e^{-t})}$$

بما أن $e^{-t} \le 1 - t + \frac{t^2}{2}$ فان $2 - 2t + t^2 - 2e^{-t} \ge 0$

و بما أن $f(t) \succ 0$ لكل $(t \succ 0)$ فان $1 + t - e^{-t} \succ 0$

و لدينا $t(4-t) \succ 0$ لان $0 \prec t \prec 4$

اذن $f(t) \le \frac{1}{2}(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t})$ *(2)*

من *(1)* و *(2)* نستنتج أن $\frac{1}{2t} \le f(t) \le \frac{1}{2}(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t})$ لكل t من $]0,4[$

ج - لدينا $\frac{1}{2t} \le f(t) \le \frac{1}{2}(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t})$

اذن $\int_x^{2x} \frac{1}{2t}dt \le \int_x^{2x} f(t)dt \le \int_x^{2x} \frac{1}{2}(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t})dt$ أي $\frac{1}{2}[\ln t]_x^{2x} \le F(x) \le \frac{1}{2}[\ln t - \ln(4-t)]_x^{2x}$

أي $\frac{\ln 2}{2} \le F(x) \le \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\ln(\frac{4-2x}{4-x})$

و بما أن $\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right) = \ln 1 = 0$ فان $\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\ln 2}{2} = F(0)$

اذن F متصلة في $x_0 = 0$

3 - أ - لدينا $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$

f متصلة على $[x,2x]$ اذن f تقبل دالة أصلية φ على $[x,2x]$ بحيث φ قابلة للاشتقاق على $[x,2x]$ $(x \succ 0)$

و $\varphi'(x) = f(x)$

لدينا $F(x) = [\varphi(t)]_x^{2x} = \varphi(2x) - \varphi(x)$

الدالة $x \to \varphi(x)$ قابلة للاشتقاق على $[x,2x]$

الدالة $x \to \varphi(2x)$ قابلة للاشتقاق على $[x,2x]$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق

اذن F قابلة للاشتقاق على $[x,2x]$ حيث $(x \succ 0)$

اذن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$

$$F'(x) = \varphi'(2x).2 - \varphi'(x) = 2f(2x) - f(x) \qquad \left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right)$$

$$F'(x) = \frac{2}{1+2x-e^{-2x}} - \frac{1}{1+x-e^{-x}}$$

$$= \frac{1 - \frac{2}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}}{g(x).g(2x)} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^{2x}.g(x).g(2x)}$$

$$F'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{e^{2x}.g(x).g(2x)}$$

ب - لدينا $(e^x - 1)^2 \ge 0$ و $g(x) \succ 0$ و $g(2x) \succ 0$ لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$

اذن F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^{*+}$