C: RS24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي

المركز الوطني للامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة الاستدراكية 2007)
الموضوع

المـــــادة: الرياضيـــــــات — مدة الإنجاز: 4

الشعـــب(ة): العلوم الرياضية (أ) و (ب) — المعامل: 10

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين الأول (3 نقط)

نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة (S) التالية : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ حيث a و b و p و q أعداد صحيحة نسبية و $p \wedge q = 1$

0.5ن | 1 – أ) بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$

0.5ن | ب) بين أن : $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة (S).

0.5ن | 2 – ليكن x حلا للنظمة (S) . بين أن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$

0.5ن | 3– ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث pq يقسم العدد $x - x_0$. بين أن x حل للنظمة (S) .

0.5ن | 4 – استنتج مجموعة حلول النظمة (S) .

0.5ن | 5 – حل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} x \equiv 1\,[8] \\ x \equiv 3\,[13] \end{cases}$

التمرين الثاني (نقطتان)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 .

لدينا n صندوقا مرقما من 1 إلى n . الصندوق رقم k $(1 \le k \le n)$ يحتوي على k كرة بيضاء و $n-k$ كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق ثم نسحب منه كرة واحدة.

0.5ن | 1-احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء .

0.75ن | 2- احسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

0.75ن | 3- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ، علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي.

التمرين الثالث (3 نقط)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر المجموعة : $(H) = \left\{ M(z) \in (P) / z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1 \right\}$

0.25ن | 1- أ) حدد معادلة ديكارتية للمجموعة (H)

0.5ن | ب) بين أن (H) هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاربيه في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

0.25ن | ج) انشئ (H) .

2- M(z) و M(z') نقطتان من (H) . نضع : $\varphi(z, z') = z\bar{z}' + \bar{z}z' - \bar{z}\bar{z}'$

0.5ن | أ) بين أن : $M(\varphi(z, z')) \in (H)$

0.5ن | ب) تحقق أن $\varphi(z, 1) = z$ وأن $\varphi(z, \bar{z}) = 1$.

1ن 3- نزود (H) بقانون التركيب الداخلي $*$ حيث لكل $M(z)$ و $M(z')$ من (H) :
$$M(z)*M(z')=M(\varphi(z,z'))$$
بين أن : $((H),*)$ زمرة تبادلية .

التمرين الرابع (3 نقط)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المجموعة التالية : $\mathcal{F}=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & -b\\ 5b & a-3b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ مزودة بجمع المصفوفات $(+)$ و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي $(.)$ و ضرب المصفوفات $(\times)$.

نضع : $I=M(1,0)$ و $J=M(0,1)$ و $O=M(0,0)$

0.5ن 1-أ) بين أن $(\mathcal{F},+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

0.5ن ب) بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{F},+,\cdot)$ واعط بعده .

0.5ن 2- ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$
بين أن الأسرة $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,.)$

3- نعتبر التطبيق ψ من $\mathbb{C}$ نحو $\mathcal{F}$ المعرف بما يلي :
$\psi(z)=M(a,b)$ لكل عنصر z من $\mathbb{C}$ حيث : $z=a+\alpha b$ و a و b عددان حقيقيان .

0.5ن أ) تحقق أن : $J^2=-2(I+J)$ و أن : $\psi(\alpha)=J$

0.5ن ب) حدد قيمتي α التي يكون من أجلهما التطبيق ψ تشاكلا تقابليا من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathcal{F},\times)$

0.5ن 4- نأخذ : $\alpha=-1+i$
اكتب في الأساس (I,J) المصفوفة J^{2007} .

التمرين الخامس (9 نقط)

I /1- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=1+x-e^{-x}$

0.25ن أ) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

0.5ن ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ وضع جدول تغيرات g .

0.25ن ج) استنتج أن $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

2- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{1+x-e^{-x}}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5ن أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)$

0.25ن ب) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

المـــادة :	الرياضيات
الشعب(ة):	العلوم الرياضية (أ) و(ب)

ج) ضع جدول تغيرات الدالة f . 0.25ن

د) أنشئ (C) . 0.5ن

3- أ) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ 0.5ن

بين أن المعادلة : $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0;+\infty[$.

ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تناقصية وأنها متقاربة . 0.5ن

ج) أثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ 0.5ن

II/ 1- أ) بين أن المعادلة $f(x)=1$ تكافئ المعادلة $e^{-x}=x$ 0.25ن

ب) بين أن المعادلة $e^{-x}=x$ تقبل حلا وحيدا هو $\alpha = x_1$ وأن : $\frac{1}{e}\leq \alpha \leq 1$ 0.5ن

2- نعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $y_1=1$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ y_{n+1}=e^{-y_n}$

أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{e}\leq y_n\leq 1$ 0.5ن

ب) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ |y_{n+1}-\alpha|\leq e^{-\frac{1}{e}}|y_n-\alpha|$ 0.5ن

ج) استنتج أن $(y_n)_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها. 0.5ن

III/ لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $F(0)=\frac{1}{2}\ell n 2$ و $\forall x>0\ ;\ F(x)=\int_x^{2x} f(t)\,dt$

1- أ) بين أن : $\forall t>0\ ;\ \frac{1}{1+t}\leq f(t)\leq \frac{1}{t}$ 0.25ن

ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 0.5ن

2-أ) بين أن : $1-t\leq e^{-t}\leq 1-t+\frac{t^2}{2}$ $\quad(\forall t\geq 0)$ 0.5ن

ب) بين أن لكل t من المجال $]0;4[$: $\frac{1}{2t}\leq f(t)\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)$ 0.5ن

ج) استنتج أن F متصلة على اليمين في 0 . 0.25ن

3-أ) بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ واحسب $F'(x)$ من أجل $x>0$ 0.5ن

ب) ادرس تغيرات F على $\mathbb{R}_+$. 0.25ن